DECISIONES Y JUICIOS COLECTIVOS PROBABILISTAS

SALVADOR BARBERÀ

I. INTRODUCCIÓN

El objeto de este capítulo es poner de relieve la importancia del análisis axiomático en economía normativa, y, más concretamente, el recurso sistemático a teoremas de imposibilidad y de caracterización como apoyos a la reflexión teórica sobre los objetivos y medios de la acción colectiva.

Para ser concreto, presentaré unos pocos resultados específicos, esperando que a la vez resulten informativos y estimulantes para una reflexión más general. Empezaré por recordar el celebrado teorema de Arrow, como punto de partida desde el cual, tomando alguna distancia adicional, poder comprender mejor las tensiones entre las distintas condiciones que maneja. Presentaré después algunos resultados bastante generales, para ganar perspectiva acerca del tipo de cuestiones y de respuestas que se plantea y obtiene la teoría de la elección social. Terminaré comentando brevemente las ventajas y limitaciones del método de análisis ejemplificado por dichos resultados como forma de reflexión en economía y en otras ciencias.

II. FUNCIONES DE AGREGACIÓN: UN MARCO GENERAL Y UN PRIMER RESULTADO

Muchos problemas de interés en economía, pero también en ética, en estadística o en política, pueden formularse en los siguientes términos: diseñar «criterios de valoración colectivos» que «agreguen adecuadamente» los «criterios de valoración individuales» correspon-

Universidad Autónoma de Barcelona.

dientes a un conjunto de «agentes». Como toda formulación general, que pretende abarcar un conjunto amplio de problemas poniendo de relieve sus características comunes, la anterior admite diversas interpretaciones —las requiere—, y no hay que dar demasiada importancia en este punto a la elección de los términos entrecomillados, mas que como punto de partida para una formalización, a la que posteriormente habrá que dotar de contenido.

Como punto de referencia, adoptaré la siguiente notación:

I denotará al conjunto de n agentes que forman la sociedad.

A denotará al conjunto de las alternativas contempladas por la sociedad (al menos tres).

Π denotará el conjunto de criterios de valoración con que puedan estar dotados los agentes. Π^n representará los perfiles de criterios que puedan convivir en una determinada configuración social.

Γ será el conjunto de criterios colectivos de valoración, que pueden o no suponerse del mismo tipo que los individuales.

Una función de agregación tendrá la forma φ: $\pi \rightarrow \Gamma$, donde $\pi \subset \Pi^n$ representará un procedimiento sistemático para asociar un criterio de valoración colectivo a cada perfil de criterios individuales. Que pueda estar sólo definida para un subconjunto de Π^n admite que sólo interese considerar determinadas combinaciones de criterios como posibles o relevantes.

El teorema de imposibilidad de Arrow (Arrow, 1951) se refiere a un tipo particular de funciones de agregación, resultante de especificar las características de los criterios de valoración relevantes del siguiente modo: suponer que $\Gamma = \Pi$, es decir, que los criterios colectivos deben ser del mismo tipo que los individuales, y que tanto uno como otro son relaciones binarias completas y transitivas sobre el conjunto de alternativas A. Podemos suponer, alternativamente, que dichas relaciones, representativas de las preferencias colectivas o individuales, admiten o no la indiferencia entre alternativas. A efectos expositivos resultará más cómodo evitar las indiferencias suponiendo que aquellas relaciones son, además, antisimétricas. Así pues, si denotamos por $\mathcal{P}$ el conjunto de relaciones binarias completas, transitivas y antisimétricas sobre A, el conjunto de funciones de agregación a las que se refiere Arrow, y a las que denomina funciones de bienestar social, son las de la forma:

$$w: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}, \text{ con } \mathcal{S} \subset \mathcal{P}^n$$

Las funciones de bienestar social admiten múltiples interpretaciones, y sirven por tanto de soporte formal para el análisis de cuestiones diversas. Así, pueden sustentar el estudio comparativo de métodos de voto, si entendemos que el resultado de una votación es una ordenación de los candidatos y que la información aportada por los agentes a través de su voto refleja sus preferencias (el análisis puede complicarse para incluir otros aspectos relevantes, como son las consideraciones estratégicas). Alternativamente, y ésta fue la motivación esencial de Arrow, el estudio de funciones de bienestar puede iluminar debates metodológicos como el suscitado entre los economistas en los años treinta y cuarenta, en torno a los juicios de valor. A lo largo de dicho debate, la llamada entonces «nueva economía del bienestar» propuso y descartó por insatisfactorios diversos procedimientos que intentaban superar, completándolo, el juicio valorativo paretiano, según el cual una alternativa debe ser colectivamente preferida a otra si lo es por todos los miembros de la sociedad. El atractivo de dicho criterio estriba en que no requiere más que información ordinal sobre las preferencias individuales y evita comparaciones interpersonales. Su principal defecto es que no define la relación social de preferencia para ningún perfil en que dos alternativas reciban cada una el apoyo de una parte de los agentes. Las posibles vías de salida exploradas por aquella literatura, consistentes en buscar criterios que completasen el de Pareto, respetándolo allí donde éste se pronunciase, tropezaban sistemáticamente con problemas: ninguno de ellos conducía a relaciones binarias que pudiesen interpretarse como preferencias análogas a las predicadas para los individuos, ya que todos ellos implicaban violaciones de la transitividad. Arrow, tomando distancia respecto a aquellos ejercicios, los reformuló como la búsqueda de funciones de bienestar social. Esto le permitió descubrir que aquellos fracasos sistemáticos no eran consecuencia de la impericia de los investigadores, sino fruto de una ambición excesiva, al demostrar que ninguna función de bienestar social podía satisfacer los requisitos implícitamente aceptados por todos ellos [1].

Estas dos interpretaciones, como métodos de votación o como procedimientos para generar juicios de valor, no son más que dos ejemplos. El teorema de Arrow, que paso a describir brevemente,

[1] Para una discusión de este punto, véanse Arrow (cap. 4), Sen (cap. 2) o Barberà y García Bermejo (1978).

ha sido tan importante, entre otras cosas, porque ha proporcionado un marco de partida, directamente o tras reformulaciones adecuadas, para reflexionar sobre problemas que surgen desde motivaciones diversas en economía, ética, política o estadística, pero comparten una misma estructura formal.

Algunas de las condiciones impuestas por Arrow sobre sus métodos de agregación vienen expresadas implícitamente en la propia forma de los objetos de investigación: las funciones de bienestar social. Una de ellas es que los criterios valorativos cumplan condiciones de «racionalidad», entendida aquí en un doble sentido: que se expresen como relaciones binarias y que, además, dichas relaciones sean transitivas, condición esta última que se entiende como requisito de coherencia. Otras son explícitas. La primera es que $\mathcal{S} = \mathcal{P}^n$. Es decir, que la función esté definida para cualquier posible perfil de preferencias. Es la condición de dominio universal. La segunda es que la función de bienestar social respete los juicos individuales, allí donde sean unánimes: es la condición de Pareto. La tercera es que la valoración social entre cada par de alternativas x e y no dependa más que de la valoración que cada individuo establezca en comparaciones binarias entre ellas: es la condición de independencia de alternativas irrelevantes. Esta condición, en el marco del teorema de Arrow es equivalente a otro requisito que, sin embargo, resultará distinto en el contexto más amplio que trataremos más adelante, y que conviene explicitar aquí: que la alternativa que se declare socialmente mejor entre las de cualquier subconjunto sólo dependa de las preferencias de los agentes sobre dicho subconjunto. Finalmente, Arrow requiere que la función de bienestar no sea trivial. Concretamente, impone que no se trate de una proyección. Una proyección escogería una componente fijada de antemano, digamos la i-ésima, como imagen de cada n-pla de valores en el dominio de la función: en este contexto esto equivaldría a que la preferencia social fuese siempre la preferencia de un mismo individuo. De ahí el nombre que Arrow le da a esta condición: que la función no sea dictatorial [2].

El resultado fundamental demostrado por Arrow es el siguiente:

---

[2] He querido destacar el significado de este requisito como una condición de no trivialidad para rechazar lecturas grotescas del teorema como posible vía de defensa de procedimientos dictatoriales.

Teorema (Arrow).

No existe ninguna función de bienestar social, definida para tres o más alternativas, que satisfaga las condiciones de dominio universal, Pareto, independencia de alternativas irrelevantes y no dictatorialidad.

III. LA REGLA PARETIANA Y LA DISTRIBUCIÓN DE PODER

Las reacciones al teorema de Arrow han sido abundantes y variadas. No intentaré resumirlas: baste con señalar que cada uno de los axiomas en que descansa ha sido criticado y modificado, que cada una de las piezas de la definición de función de bienestar social ha sido modificada para dar lugar a otros tipos de procedimientos de agregación, y que sobre cada clase de procedimientos y de sistemas de axiomas se han estudiado posibilidades e imposibilidades, merecedoras en cada caso de interpretaciones diversas. Todo ello ha dado lugar a una vasta literatura, cuyo núcleo se conoce como la teoría de la elección social, pero que desborda incluso los límites de la producción evocada por este título [3]. Mi propósito, muy limitado, es describir una línea particular de ampliación del marco arrowiano que me parece especialmente esclarecedora. Como prólogo, veamos una primera modificación de este marco, acaso la más inmediata.

Es fácil comprobar que la regla de unanimidad satisface todas las condiciones impuestas por Arrow. Sin embargo, no constituye una función de bienestar social porque las relaciones sociales a las que da lugar no son completas. Una modificación natural de la regla de unanimidad consistiría en declarar que, allí donde aquélla no se pronunciase, por falta de acuerdo entre los agentes respecto a dos alternativas x e y, la nueva regla, a la que podríamos llamar Pareto-completa, declarase que ambas alternativas son indiferentes. Así pues, la regla Pareto-completa, que seguiría respetando todos los axiomas de Arrow, garantizaría siempre la comparación social entre alternativas. ¿Contradice esto el teorema de Arrow? No, porque, de nuevo, la regla incumple otro de los requisitos exigidos de una función de

[3] Véase la extensa aunque no exhaustiva bibliografía publicada por Kelly en *Social Choice and Welfare*, 1991.

bienestar social: que su imagen sea siempre transitiva. Y basta un ejemplo con dos agentes para ver que puede violarse la transitividad. Supongamos que el agente 1 prefiere x a y, e y a z, mientras que 2 prefiere z a x y x a y. Tendríamos entonces que x es socialmente indiferente a z, que z es socialmente indiferente a y, mientras que x no es socialmente indiferente, sino estrictamente preferida a y. Esta violación de la transitividad impide considerar a la regla Pareto-completa como función de bienestar: pero parece natural preguntarse hasta qué punto y en qué sentido podríamos considerar que el teorema de Arrow es robusto ante cambios en la definición del tipo de función de agregación considerada. Un examen algo más detallado de aquella regla nos dará pistas sobre cómo analizar dicha robustez.

Un primera observación sobre la regla Pareto-completa es que, aunque violen la transitividad, las preferencias sociales a las que da lugar siguen respetando una propiedad análoga: su parte estricta es transitiva, si bien la indiferencia puede no serlo, como hemos visto en nuestro ejemplo. Diremos de este tipo de preferencias sociales que son casi-transitivas. Como esta diferencia parece relativamente menor, si la regla Pareto-completa, u otras en su clase, resultasen totalmente satisfactorias, podríamos cuestionar la robustez del teorema de Arrow. Veamos, sin embargo, que una parte esencial del mensaje arrowiano se mantiene intacto en este nuevo contexto. Para ello, observemos que cualquier regla de agregación conlleva una determinada distribución del poder de decisión. En el caso de Arrow este poder se distribuye trivialmente: un mismo agente determina la relación social de preferencia entre cualquier par de alternativas. Con la regla Pareto-completa, podemos distinguir dos tipos de poder: por una parte, cada agente tiene poder para evitar que una alternativa x sea declarada preferida a otra, y, ya que bastará con que dicho agente declare preferir y sobre x para que y sea socialmente indiferente o preferida a x. Pero, en cambio, sólo el conjunto de todos los agentes tiene poder para garantizarse la preferencia social estricta de una alternativa sobre otra. Podemos así distinguir entre dos tipos de poder. Uno débil, o poder de veto, que permite evitar que las preferencias sociales ordenen alternativas en contradicción rotunda con las de quienes lo detentan, pero no garantiza coincidencia total entre una y otras. Y un poder fuerte, que garantiza a quienes lo poseen la coincidencia entre sus preferencias y las sociales, en caso de que todo el grupo esté de acuerdo en una misma dirección.

Bajo la regla Pareto-completa cada agente tiene poder débil, y el conjunto de todos ellos detenta el poder fuerte. Éste es un ejemplo de distribución de poder que se ha llamado oligárquica (con cierto abuso de lenguaje): existe un grupo dotado de poder fuerte, y cada uno de sus componentes dispone de poder débil. Es sabido que todas las funciones de agregación de preferencias que generan relaciones sociales casi-transitivas y que satisfacen las demás condiciones de Arrow dan lugar a distribuciones oligárquicas de poder [4]. Además, la relación Pareto-completa es la más aceptable entre todas ellas, ya que es anónima, es decir, reparte el poder débil por igual entre todos los agentes.

Las observaciones anteriores nos permiten una relectura conjunta del anterior resultado y del teorema de Arrow. Ambos se refieren a la estructura de poder inducida por diversos tipos de funciones de agregación. Y ambos tienen una característica común: que el poder para influir sobre las decisiones sociales está distribuido *a priori* entre individuos y grupos, a veces de forma exclusiva (poder fuerte), a veces compartido (poder de veto), pero siempre de forma rígida. Al contrario que en las decisiones por mayoría, en que mi poder de decisión depende de mi grado de acuerdo con los demás, en las reglas arrowianas el poder se reparte rígidamente, de una vez por todas. Se soslaya un verdadero proceso de agregación concediendo a cada parte un terreno de decisión exclusivo, que puede ser imposible de compartir —teorema de Arrow—, o ser compartido —regla Pareto-completa— pero en este caso a costa de altos grados de indecisividad, reflejada en indiferencias sociales cada vez que los miembros de la oligarquía que comparte el poder fuerte disienten entre sí. Esta indecisividad está directamente contrapuesta con un reparto extendido del poder débil: cuanto mayor sea la oligarquía más abundantes serán los perfiles que conduzcan a indiferencias sociales. Los casos polares son la regla dictatorial, en que se identifican poder fuerte y débil y se evitan indiferencias a costa de la máxima discriminación entre agentes, y la regla Pareto-completa, que no discrimina entre éstos pero es mínimamente decisiva.

Concluyo, pues, que el mensaje del teorema de Arrow, visto como un resultado sobre la rigidez del reparto de poder compatible con sus demás condiciones, se mantiene bajo versiones más relajadas de los procesos de agregación que incluyan, por ejemplo, la posibilidad de relaciones sociales casi-transitivas. En las páginas que siguen

---

[4] Mas-Colell y Sonnenschein discuten ésta y otras variantes del marco arrowiano.

argumentaré que dicho resultado es robusto ante reformulaciones mucho más generales del problema de la agregación de criterios valorativos.

IV. UN MARCO MÁS GENERAL. JUICIOS COLECTIVOS PROBABILISTAS

Consideremos la siguiente regla de agregación: dadas las preferencias de los distintos agentes, escójase una de ellas al azar como preferencia social. De nuevo, esta regla no es una función de bienestar social, porque aunque su campo de definición sea el mismo, tiene imágenes más complejas: sus resultados son distribuciones de probabilidad (loterías) sobre las posibles preferencias. Sin duda comparte muchas de las propiedades exigidas por Arrow a sus funciones de bienestar (Pareto, independencia de alternativas irrelevantes, dominio universal), aunque en rigor habría que redefinirlas para que se aplicasen a esta nueva forma de agregación. Y vemos que, en cambio, no sólo no es dictatorial, sino que da tratamiento idéntico a todos los agentes. Con todo, sigue distribuyendo el poder de modo rígido, en este caso asignando una probabilidad *a priori* de $1/n$ a que los juicios de un agente se conviertan en los juicios colectivos, independientemente de su grado de acuerdo con los demás. Por ello nos referiremos a ella como la regla del dictador aleatorio.

Un segundo ejemplo, en una línea similar, nos lo proporciona la siguiente adaptación probabilista de la regla Pareto-completa: fijemos una distribución de probabilidad sobre las coaliciones (grupos de agentes) que pueden formarse entre los distintos miembros de la sociedad. Dado un perfil de preferencias, formemos para cada coalición la relación Pareto-completa correspondiente a las preferencias de los individuos que la componen, y atribuyámosle a cada una de estas relaciones la probabilidad correspondiente a su coalición. Esta regla, de nuevo, nos agrega preferencias individuales dando lugar a loterías sobre relaciones binarias, que esta vez son casi-transitivas. Y sus analogías y diferencias con la regla Pareto-completa (correspondiente al caso en que toda la probabilidad se concentra en la coalición formada por todos los agentes) corren en paralelo a las comparaciones establecidas entre la regla dictatorial y el dictador aleatorio.

Tanto uno como otro ejemplo introducen la posibilidad de que los resultados de un proceso de agregación de preferencias dejen abierto un margen al azar. La idea en sí misma no debe sorprender. En muchos contextos, decidir por azar entre derechos *a priori* semejantes pero incompatibles se acepta como un modo razonable de hacer justicia. Otra cosa, más compleja, es decidir qué probabilidades atribuir a cada opción posible, cómo tener en cuenta los derechos y opiniones de grupos enfrentados. Nuestro análisis, en lo que sigue, aborda dos formalizaciones posibles de los procesos a través de los cuales escoger loterías que tengan en cuenta adecuadamente, en un sentido a definir, los criterios de los agentes y grupos que componen una sociedad [5].

Antes de proceder a definiciones formales, observemos que los ejemplos anteriores dan lugar a dos tipos de distribuciones, que nos conviene distinguir. Por una parte, nos permiten decir, para cada perfil, y para cada par de alternativas, con qué probabilidad será preferida una a la otra. Es lo que llamaremos un juicio probabilístico colectivo. Por otra, también podemos establecer con qué probabilidad sería escogida una alternativa sobre cada uno de los subconjuntos posibles de alternativas. Estos dos aspectos, juicio comparativo y elección, que van indisolublemente ligados cuando hablamos de preferencias deterministas, no tienen por qué ser tan paralelos en un contexto probabilístico, y los estudiaremos uno a uno.

Para formalizar lo anterior, definiremos un juicio probabilista como una función

$r\colon A \times A \to [0, 1]$ tal que

(a) $(\forall x \in A)\, r(x, x) = 1$

(b) $(\forall x, y \in A)\, r(x, y) + r(y, x) \geq 1$

e interpretaremos que nos indica, para cada par de alternativas x, y, con qué probabilidad $r(x, y)$ consideraremos x al menos tan preferida como y. Las relaciones binarias pueden verse como juicios pro-

[5] Un ejemplo clásico, presentado en diversas formas por varios autores, es el siguiente: alguien puede tomar una acción, y sólo una, entre dos posibles. Una de ellas evitará la muerte de 10 personas, y otra evitará la muerte de 50. Si opta por el azar como método para darles a todos una oportunidad, ¿deberá utilizar un dado, para decidir con probabilidades 1/6, 5/6, o bien una moneda que le dé a cada grupo probabilidad 1/2 de salvación?

babilistas que tomen sólo valores 0 ó 1, y las condiciones (a) y (b) juegan el papel, respectivamente, de la reflexividad y la completitud en este contexto más amplio.

Una función de decisión probabilista, por su parte, tomará la forma

$$k: Ax2^A \rightarrow [0, 1]$$

tal que

(a) $k(x, B) \geq 0 = 0$ si $x \notin B$

(b) $\sum_{x \in B} k(x, B) = 1$ para todo B.

Entenderemos que $k(x, B)$ indica la probabilidad de que x sea escogida entre los elementos de B.

Un juicio probabilista extiende la noción de relación binaria. Y, del mismo modo que a éstas, se le pueden imponer condiciones de «coherencia» o de «racionalidad». Un modo en que hacerlo consiste en suponer, precisamente, que los juicios probabilistas se derivan de distribuciones sobre preferencias que, a su vez, disfrutan de tales características. Por ejemplo, podríamos decir que r es (casi-)transitivamente racionalizable si existe una lotería h sobre las preferencias (casi-)transitivas tal que, para todo par de alternativas x, y, $r(x, y)$ sea igual a la probabilidad que h le atribuye al conjunto de las preferencias para las cuales x es mejor que y. Pero no todos los juicios probabilistas son racionalizables en este sentido. Concretamente, una condición necesaria, aunque no suficiente, para que r fuese transitivamente (y también casi-transitivamente) racionalizable es la siguiente:

Condición triangular:

$$(\forall x, y, z) \qquad 1 \leq r(x, y) + r(y, z) + r(z, x) \leq 2$$

Vemos que, cuando los valores de r son sólo 0 ó 1, esta condición es equivalente a la transitividad de la relación estricta. La presentamos aquí como ilustración del tipo de requisitos adicionales que se podrían imponer sobre los juicios probabilistas, si se desea que estos preserven una coherencia mínima —como, por ejemplo, disfrutar de ciertas propiedades de coherencia determinista en aquellos casos en que los juicios probabilistas se hagan con certeza [6].

Para evitar complicaciones innecesarias en esta exposición, formulamos el siguiente resultado en términos algo menos generales de lo posible, pero suficientes para nuestros propósitos ilustrativos.

Sea Λ el conjunto de los juicios probabilistas que pueden generarse a través de loterías sobre preferencias casi-transitivas.

Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones de agregación

$$\varphi: \mathcal{P}^n \rightarrow \Lambda$$

que a cada perfil de preferencias individuales le asignan un juicio colectivo probabilista.

Sobre dichas funciones de agregación podemos imponer las condiciones siguientes. Una, de unanimidad, según la cual si todos los agentes prefieren x a y, entonces x sea socialmente mejor que y con probabilidad 1. Otra de independencia binaria, por la que si dos perfiles ordenan del mismo modo a x e y para todos los agentes, entonces la probabilidad de que x sea socialmente al menos tan buena como y resulte la misma para ambos perfiles. Como extienden de modo natural las condiciones arrowianas de Pareto e independencia de alternativas irrelevantes, podemos retener estos mismos nombres. Podemos ahora formular el siguiente:

Teorema (Barberà y Valenciano).

Sea una función de agregación φ: $\mathcal{P}^n \rightarrow \Lambda$ que genera juicios colectivos probabilistas casi-transitivamente racionalizables y satisface las condiciones de dominio universal, Pareto e independencia de alternativas irrelevantes.

Dicha función de agregación induce:

a. una distribución de poder débil que es subaditiva.
b. una distribución de poder fuerte que es superaditiva si el conjunto A de alternativas tiene seis o más elementos.

Además, dichas distribuciones son idénticas si las imágenes de la función de agregación son siempre transitivamente racionalizables.

[6] Para un resumen de la abundante pero poco conocida literatura sobre preferencias estocásticas, véanse Barberà (1990) o Fishburn (1995).

Empecemos el comentario a este resultado aclarando el sentido de las funciones de poder aquí definidas. Tanto la que define el poder débil como el fuerte le dan un valor entre 0 y 1 a cada coalición. Sea $B(x, y)$ el conjunto de los agentes que prefieren x a y en un determinado perfil. La probabilidad del juicio «x es al menos tan bueno como y» será igual al poder débil de $B(x, y)$, y la probabilidad de «x es mejor que y» será igual al poder fuerte de $B(x, y)$. Vemos, pues, que en el caso determinista los posibles valores de dichos poderes serán 0 ó 1.

El poder débil es subaditivo. Esto significa que, si C y D son dos coaliciones disjuntas de agentes, el poder de su unión será menor o igual que la suma de sus poderes por separado. Para las funciones paretianas, que le dan poder fuerte (y por tanto débil) igual a 1 al conjunto de todos los agentes, la subaditividad exige que la suma de los poderes débiles individuales sea mayor o igual a 1. En el caso determinista, en que la única alternativa al valor 0 es el 1, esto nos dice que al menos un agente debe tener poder de veto: recuperamos el resultado sobre la existencia de vetadores cuando las preferencias sociales son cuasi-transitivas. Es más: el teorema nos indica que bajo juicios probabilistas transitivamente racionalizables el poder débil y el fuerte son idénticos. En tal caso, los poderes fuertes de los agentes individuales deben sumar más de 1, y en el caso determinista algún agente individual deberá tener poder fuerte unitario: es el dictador arrowiano.

La anterior observación me parece especialmente iluminadora. En un contexto mucho más amplio que el de las funciones de bienestar social, pero que admite similares axiomas, éstos implican un reparto de poder entre las distintas coaliciones. Dicho poder no es necesariamente exclusivo de una coalición, pero sí debe satisfacer una condición de subaditividad, en el caso del poder débil, que se transmite al fuerte si imponemos transitividad estocástica a los juicios colectivos. Los vetadores y el dictador arrowiano aparecen, a la luz de estos resultados, como resultado de los únicos repartos de poder compatibles con la subaditividad en contextos deterministas donde aquél es indivisible.

Incluso en contextos probabilistas, las distribuciones de poder compatibles con los postulados arrowianos resultan muy rígidas. Esto es especialmente claro para más de seis alternativas, ya que entonces el poder fuerte se hace superaditivo. En particular, vemos que dichas propiedades se ven satisfechas por la regla Pareto-completa, incluso en su versión determinista: el poder débil de los agentes es subaditivo, ya que varios agentes con poder 1 retienen conjuntamente un poder que sigue siendo igual al de cada uno de ellos, mientras que el poder fuerte es superaditivo, dado que la unión de agentes con poder nulo resulta en una coalición (la de todos ellos) con poder 1, y por tanto superior a la suma del de sus partes. Además, en el caso transitivo, en que poder fuerte y débil coinciden, la superaditividad y la subaditividad imponen conjuntamente que el poder sea aditivo: cada coalición vale tanto como la suma de sus partes. Esta propiedad, obviamente satisfecha por la regla del dictador aleatorio, ilustra el sentido en que hablamos de distribución trivial del poder decisorio en contextos de agregación análogos al propuesto por Arrow. Es más: si ampliamos ligeramente la noción de dictador aleatorio, admitiendo que las probabilidades de elección de cada agente puedan no ser las mismas, las reglas basadas en dictadores aleatorios ponderados nos describen la totalidad de los métodos de agregación capaces de satisfacer aquellas condiciones [7].

V. DECISIONES COLECTIVAS PROBABILISTAS

Ya he comentado de pasada, al hablar del teorema de Arrow, que los resultados de un proceso de agregación de preferencias pueden entenderse bien como valoraciones sociales de las alternativas consideradas, bien como criterios de decisión entre ellas. Esta distinción es poco necesaria, al menos formalmente, mientras los criterios sociales sean relaciones binarias, ya que éstas reflejan directamente juicios valorativos, y a la vez recomiendan la elección del conjunto de sus elementos maximales para cada subconjunto de alternativas entre las que se deba escoger. (Aunque incluso en este caso se puede distinguir entre valoraciones y elecciones: así, una preferencia cíclica manifiesta valoraciones binarias, pero puede no tener elementos maximales.) En el marco probabilista que he estado describiendo, la distinción se hace mucho más conveniente. Para ilustrarlo, consideremos un ejemplo.

Supongamos una situación con tres alternativas en la que, dadas las preferencias de los distintos agentes, hubiésemos emitido el si-

[7] Véanse Barberà y Sonnenschein (1978) y McLennan (1980).

guiente juicio probabilista: para cada par de alternativas, la probabilidad de que una sea declarada al menos tan deseable como la otra es igual a 1/2. ¿Qué implicaciones tendría este juicio si, una vez emitido, queremos utilizarlo como base para escoger entre x, y, z? La respuesta no es clara. El concepto de elemento maximal no está definido [8]. Una posible respuesta sería la siguiente: consideremos una lotería sobre preferencias que induzca nuestro juicio probabilista, y calculemos las probabilidades de elección de cada alternativa bajo aquella lotería. Pero esta idea no nos conduce muy lejos. El juicio probabilista de nuestro ejemplo puede generarse con una lotería que le asigne probabilidad 1/2 al orden xyz y probabilidad 1/2 al orden zyx. Pero también puede obtenerse asignándole probabilidad 1/6 a cada uno de los seis órdenes estrictos entre las tres alternativas. Y, mientras que la primera lotería escogería sólo a x o a z, cada una con probabilidad 1/2, bajo la segunda cada una de las tres alternativas recibiría probabilidad 1/3. Debido a este tipo de dificultades, resulta más conveniente separar claramente los dos problemas que se confunden en la formulación arrowiana, admitiendo contextos en los que se busca emitir juicios y otros en los que se afronta directamente el problema de escoger. Ya hemos analizado el primero en la sección anterior. Pasemos a ver ahora cómo podría formalizarse el segundo, a través de las funciones de decisión probabilistas.

Como ya hemos visto en la sección anterior, una función de decisión probabilista le asigna a cada alternativa la probabilidad de ser escogida dentro de cada subconjunto posible de alternativas. Sobre estas funciones resulta natural imponer la siguiente condición de regularidad: que para cada alternativa x, y para cualquier par de conjuntos B y B', si B es un subconjunto de B', la probabilidad de elección de x en B no sea mayor que la de x en B'.

Sea Θ el conjunto de todas las funciones de decisión probabilistas regulares, y consideremos las reglas de agregación de la forma $h: \mathcal{P}^n \rightarrow \Theta$.

Cada una de estas funciones nos indicará, para cada perfil de preferencias individuales, con qué probabilidad debería ser escogida por la sociedad cada una de las alternativas, entre aquellas que le están disponibles. ¿Cuál será, en este contexto, la contrapartida de

[8] Bajo una interpretación alternativa, los juicios probabilistas podrían entenderse como relaciones difusas. Tampoco en este caso existe acuerdo sobre la definición más adecuada de maximalidad.

las condiciones arrowianas? La condición de dominio universal seguirá siendo la misma. La condición de Pareto dirá ahora que, si todos los agentes prefieren unánimemente a x sobre y, la probabilidad de que y sea escogida en subconjuntos a los que también pertenece x debe ser 0. Finalmente, la independencia de alternativas irrelevantes requerirá que, bajo dos perfiles de preferencias en que todos los agentes coincidan sobre la ordenación de los elementos de un subconjunto de alternativas B, las probabilidades de elección atribuidas a los elementos de B sean las mismas. Como hice notar al hablar de independencia de alternativas irrelevantes en el contexto arrowiano, hay dos versiones de esta propiedad que se confunden en el estrecho marco de las funciones de bienestar social y que aquí podemos diferenciar: en esta sección se está extendiendo la noción de independencia asociada con la elección, mientras que al hablar de juicios probabilistas colectivos ampliamos la noción de independencia binaria. Y, de nuevo, podemos enunciar un resultado que preserva, en lo esencial, la estructura común a todos los que venimos considerando.

Teorema (Pattanaik y Peleg).

Sea una regla que agrega preferencias individuales en forma de funciones probabilistas de decisión regulares. Si hay al menos cuatro alternativas, y la regla satisface las condiciones de dominio universal, Pareto e independencia de alternativas irrelevantes, se trata de una dictadura aleatoria ponderada.

Como vemos, este resultado es aún más cercano al de Arrow que el referido a juicios probabilistas de la sección anterior, y esto a pesar de que la restricción de coherencia impuesta sobre las decisiones a través de la condición de regularidad resulta muy débil. La razón es que, en cambio, la versión de independencia, en este caso, es mucho más exigente que la independencia binaria allí considerada.

VI. COMENTARIOS FINALES

La ampliación del marco formal propuesto por Arrow para analizar la formación de decisiones y juicios colectivos nos permite comprender mejor lo esencial de sus conclusiones: que la combinación de las propiedades de dominio universal, independencia y Pareto exige distribuir la capacidad de decisión social de forma rígida, en cualquier caso. Queda excluida, en los marcos analizados, la posibilidad de distribuir poderes distintos sobre pares distintos de alternativas, como sería deseable si quisiéramos, por ejemplo, definir ámbitos individuales de soberanía, al estilo de la literatura en que se analiza el conflicto entre liberalismo y utilitarismo [9]. Además, queda excluida la posibilidad, presente en reglas como la de mayoría, de que un mismo agente pueda tener un gran poder decisorio en ciertas circunstancias (cuando de su voto depende de qué lado se decanta una mayoría) y ninguno en otras (si el sentido de la mayoría no puede verse afectado por su opinión). Esta falta de flexibilidad de la distribución de cotas de poder fijas a individuos y grupos, parece el aspecto más robusto en la descripción de las reglas de agregación que mantienen el espíritu arrowiano, incluso después de ampliaciones sustanciales en el marco general de referencia.

Los resultados presentados reflejan una pequeña parte de los esfuerzos dedicados a investigar la estructura y propiedades de modelos de agregación, que a su vez sirven de soporte para la reflexión sobre la toma de decisiones colectivas o la formación de juicios valorativos. Se trata, pues, en el mejor de los casos, de construcciones relativamente alejadas de los procesos efectivos que generan decisiones o configuran opiniones en la vida real. Pero resultan útiles, creo, para desbrozar terreno y comprender concretamente, en este terreno, la implicación tantas veces reiterada, en distintos contextos, por el análisis axiomático, pero tantas veces ignorada también, de que una acumulación de requisitos aparentemente atractivos sobre objetos de nuestro interés, puede llevarnos, más fácilmente de lo que parece, a fijarnos objetivos incompatibles. La economía, entre otras, vive de recordar constantemente la existencia de estas incompatibilidades y la necesidad de arbitrajes continuos, en la práctica y también en la teoría.

---

[9] Esta neutralidad de las reglas de agregación respecto a las alternativas deja de obtenerse si se relajan los requisitos de coherencia en los criterios colectivos. En el caso determinista, si sólo se exige que las preferencias sociales sean acíclicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrow, K. J. (1964), *Social Choice and Individual Values,* 2.ª ed., Nueva York, John Wiley and Sons. [*Elección social y valores individuales,* Madrid, Instituto de Estudios Fiscales, 1974.]

Bandyopadhyay, T.; Deb, R. y Pattanaik, P. K. (1982), «The Structure of Coalitional Power under Probabilistic Group Decision Rules», *Journal of Economic Theory,* núm. 27.

Barberà, S. (1990), «Rationalizable Stochastic Choice on Restricted Domains», en Chipman, McFadden y Richter (comps.), *Preferences, Uncertainty and Optimality: Essays in Honor of Leonid Hurwicz,* Boulder (Co.), Westview Press.

Barberà, S. y García Bermejo, J. C. (1978), «Prohibiciones metodológicas y economía de bienestar», *Cuadernos de Información Comercial Española.*

Barberà, S. y Sonnenschein, H. (1978), «Preference Aggregation with Randomized Social Orderings», *Journal of Economic Theory,* núm. 18.

Barberà, S. y Valenciano, F. (1983), «Collective Probabilistic Judgements», *Econometrica,* núm. 51.

Falmagne, J. C. (1978), «A Representation Theorem for Finite Random Scale Systems», *Journal of Mathematical Psychology,* núm. 18.

Fishburn, P. C. (1995), en Barberà, Hammond y Seidl (comps.), *Handbook of Utility Theory,* Kluwer Academic (en prensa).

Kelly, J. (1991), «Social Choice Bibliography», *Social Choice and Welfare,* vol. 8, núm. 2.

Mas-Colell, A. y Sonnenschein, H. (1972), «General Possibiity Theorems for Group Decisions», *Review of Economic Studies,* núm. 39.

McLennan, A. (1980), «Randomised Preference Aggregation: Additivity of Power and Strategy-proofness», *Journal of Economic Theory,* núm. 22.

Sen, A. K. (1970), *Collective Choice and Social Welfare,* San Francisco, Holden Day. [*Elección colectiva y bienestar social,* Madrid, Alianza, 1976.]